Control 2 Grupos 3S1M-B y 3S3T

Apellidos .... **Nombre** ....

1) (3,5 puntos)

Sea D el digrafo ponderado cuyo conjunto de vértices es {A, B, C, D, E} y cuya matriz de pesos es $M = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 7 & \infty & 2 \\ \infty & 0 & 1 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 4 \\ 1 & \infty & \infty & 0 & 3 \\ \infty & 3 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$.

a) ¿Cuál es el algoritmo que, en la inicialización de datos, construye una matriz P de predecesores de las mismas dimensiones que la de pesos? ¿Qué se obtiene al finalizar la ejecución de ese algoritmo? Construye P.

Se trata del algoritmo de Floyd-Warshall. La salida de este algoritmo son dos matrices: la de distancias, cuyos elementos son, para cada *i*,*j*, la longitud del camino más corto del vértice *i* al *j*, y la de predecesores, de la que se puede obtener el camino más corto de *i* a *j*.

$$P^0 = \begin{pmatrix} - & 1 & 1 & - & 1 \\ - & - & 2 & 2 & - \\ - & - & - & - & 3 \\ 4 & - & - & - & 4 \\ - & 5 & - & - & - \end{pmatrix}$$

b) Tras aplicar tres iteraciones completas del algoritmo del apartado a) se obtienen las matrices de pesos $\begin{pmatrix} 0 & 8 & 7 & 10 & 2 \\ \infty & 0 & 1 & 2 & 5 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 4 \\ 1 & 9 & 8 & 0 & 3 \\ \infty & 3 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ y de predecesores $\begin{pmatrix} - & 1 & 1 & 2 & 1 \\ - & - & 2 & 2 & 3 \\ - & - & - & - & 3 \\ 4 & 1 & 1 & - & 4 \\ - & 5 & 2 & 2 & - \end{pmatrix}$. ¿Cuántas iteraciones faltan para completar el algoritmo? Ejecútalas y describe con detalle un caso en el que se hayan producido modificaciones y un caso en el que no se hayan producido.

El digrafo tiene 5 vértices, por tanto, para completar el algoritmo de Floyd-Warshall, se deber realizar 5 iteraciones. Como ya se han aplicado tres, faltan dos para completar el algoritmo.

$$W^0 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 7 & \infty & 2 \\ \infty & 0 & 1 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 4 \\ 1 & \infty & \infty & 0 & 3 \\ \infty & 3 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \qquad P^0 = \begin{pmatrix} - & 1 & 1 & - & 1 \\ - & - & 2 & 2 & - \\ - & - & - & - & 3 \\ 4 & - & - & - & 4 \\ - & 5 & - & - & - \end{pmatrix}$$

$$W^1 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 7 & \infty & 2 \\ \infty & 0 & 1 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 4 \\ 1 & 9 & 8 & 0 & 3 \\ \infty & 3 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \qquad P^1 = \begin{pmatrix} - & 1 & 1 & - & 1 \\ - & - & 2 & 2 & - \\ - & - & - & - & 3 \\ 4 & 1 & 1 & - & 4 \\ - & 5 & - & - & - \end{pmatrix}$$

$$W^2 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 7 & 10 & 2 \\ \infty & 0 & 1 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 4 \\ 1 & 9 & 8 & 0 & 3 \\ \infty & 3 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad P^2 = \begin{pmatrix} - & 1 & 1 & 2 & 1 \\ - & - & 2 & 2 & - \\ - & - & - & - & 3 \\ 4 & 1 & 1 & - & 4 \\ - & 5 & 2 & 2 & - \end{pmatrix}$$

$$W^3 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 7 & 10 & 2 \\ \infty & 0 & 1 & 2 & 5 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 4 \\ 1 & 9 & 8 & 0 & 3 \\ \infty & 3 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad P^3 = \begin{pmatrix} - & 1 & 1 & 2 & 1 \\ - & - & 2 & 2 & 3 \\ - & - & - & - & 3 \\ 4 & 1 & 1 & - & 4 \\ - & 5 & 2 & 2 & - \end{pmatrix}$$

$$W^4 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 7 & 10 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 4 \\ 1 & 9 & 8 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad P^4 = \begin{pmatrix} - & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & - & 2 & 2 & 3 \\ - & - & - & - & 3 \\ 4 & 1 & 1 & - & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 2 & - \end{pmatrix}$$

$$W^5 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 & 7 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 10 & 7 & 0 & 9 & 4 \\ 1 & 6 & 7 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = P^5 = \begin{pmatrix} - & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & - & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & - & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & - & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 2 & - \end{pmatrix}$$

if $(W^{k-1}(i,j) > W^{k-1}(i,k) + W^{k-1}(k,j))$ ***entonces:***

$W^{k}(i,j) \leftarrow W^{k-1}(i,k) + W^{k-1}(k,j)$

$P^{k}(i,j) \leftarrow P^{k-1}(k,j)$

$W^{3}(2,1) > W^{3}(2,4) + W^{3}(4,1)$

$\infty > 2 + 1$

$W^{4}(2,1) \leftarrow 3 \qquad P^{4}(2,1) \leftarrow P^{3}(4,1)=4$

$W^{3}(5,2) > W^{3}(5,4) + W^{3}(4,2)$

$3 \not> 5 + 9$

$W^{4}(5,2) \leftarrow W^{3}(5,2) = 3 \qquad P^{4}(5,2) \leftarrow P^{3}(5,2) = 5$

c) Describe la recuperación del camino de A a C.

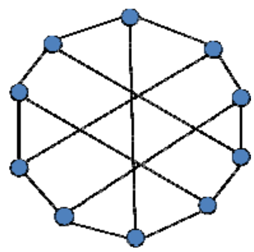
Camino(1,3) = [Camino(1,P(1,3)),3] = [Camino(1,2),3] = [Camino(1,P(1,2)),2,3] = [Camino(1,5),2,3] = [Camino(1,P(1,5)),5,2,3] = [Camino(1,1),5,2,3] = [1,5,2,3]. El camino es A,E,B,C

d) Con la matriz de pesos obtenida en la última iteración, ¿qué se puede decir de la conectividad del digrafo?

La matriz W^5 contiene las distancias de cada vértice *i* a cada vértice *j*. Si alguno de los elementos es igual a $\propto$, quiere decir que no existe camino del vértice *i* al vértice *j*. Como ninguno de los elementos es $\propto$, hay camino de cada uno de los vértices a todos los demás. Por tanto, el digrafo es fuertemente conexo y, por tanto, también es débilmente conexo.

2) (3 puntos)

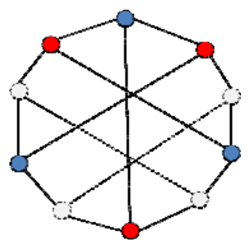
Dado el grafo de la figura:



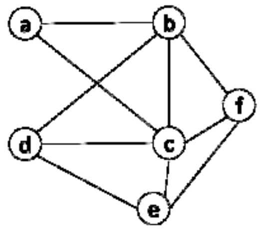
a) Define grafo euleriano. Estudia si el grafo de la figura lo es y si tiene un recorrido euleriano abierto.
Se puede ver que tiene más de dos vértices de grado impar. Por el teorema de Euler, el grafo no es euleriano ni tiene un camino euleriano abierto.

b) Define grafo hamiltoniano. Estudia si el grafo de la figura lo es y si tiene un camino hamiltoniano abierto.
Recorriendo consecutivamente todas las aristas exteriores se construye un ciclo hamiltoniano, por lo que el grafo es hamiltoniano. Si no se recorre una de ellas, se obtiene un camino hamiltoniano abierto.

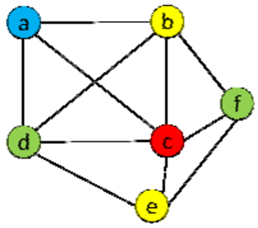
c) Define grafo planar. Estudia si el grafo de la figura es planar. En caso afirmativo comprueba la fórmula de Euler. En caso negativo demuéstralo aplicando el teorema de Wagner o el de Kuratowski, enuncia formalmente el teorema que estás utilizando y define el concepto principal que maneja este teorema.
El grafo no es planar: eliminando las aristas punteadas, el subgrafo obtenido es homeomorfo al $K_{3,3}$ (borrando los vértices de grado 2). Por el teorema de Kuratowski se deduce que no es planar.



3) (3,5 puntos)



a) Aplica el algoritmo Dsatur de Brélaz para colorear el grafo de la figura describiendo, mediante tablas, el estado de las estructuras en cada iteración del algoritmo. En caso de empate entre dos vértices en los criterios del algoritmo, elige el primero en orden alfabético.



	a	b	c	d	e	f
Col	4	2	1	3	2	3

	a	b	c	d	e	f
SD	0	0	**0**	0	0	0
UD	3	4	**5**	4	3	3
SD	1	1		1	1	1
UD	2	3		3	2	2
SD	2			2	1	2
UD	1			2	2	1
SD	3				2	2
UD	0				1	1
SD					2	2
UD					1	1
SD						2
UD						0

b) Describe con detalle las iteraciones tercera y quinta del algoritmo

Iteración 3: De entre los tres vértices que tienen grado de saturación máximo = 2 (a, d, f) se elige d, el de grado máximo en el subgrafo de los vértices no coloreados y se le asigna el primero de los colores posibles que es el 3 (para este proceso se consulta la fila 3 de datos).

Como el color es nuevo, ninguno de los dos adyacentes no coloreados de d (a, e) puede tener un adyacente con ese color, por lo que se aumenta en 1 el grado de saturación de estos vértices y se disminuye en 1 el grado en el subgrafo de vértices no coloreados de los mismos. El vértice no adyacente a d o los ya coloreados no sufren modificación.

Iteración 5: Los dos vértices restantes tienen grado de saturación máximo = 2 e igual grado en el subgrafo de los vértices no coloreados. Se elige e (primero en orden alfabético y se le asigna el primero de los colores posibles que es el 2.

Como el color es igual al de uno de los adyacentes a f, no se aumenta el grado de saturación de este vértice pero sí se disminuye en 1 el grado en el subgrafo de vértices no coloreados del mismo.

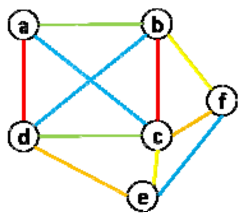
c) ¿Se obtiene, en general, el número cromático $\chi(G)$ de un grafo G al aplicarle el algoritmo Dsatur? ¿Qué nos garantiza este algoritmo?

El algoritmo Dsatur de Brélaz es un algoritmo aproximado, que no garantiza la obtención del número cromático $\chi(G)$. Brelaz sólo demostró que su algoritmo conseguía el número cromático en el caso de grafos bipartidos.

d) ¿Se obtiene, en este caso, el número cromático al aplicar el algoritmo Dsatur? Razona la respuesta.

En este caso, el algoritmo nos proporciona una 4-coloración que no puede ser mejorada ya que el subgrafo inducido por los vértices a, b, c, d es un K_4, que tiene $\chi(K_4) = 4$. Por tanto el grafo tiene como número cromático $\chi(G) = 4$ y la coloración obtenida mediante el algoritmo de Brélaz es óptima.

e) Construye una coloración de las aristas del grafo G ¿Has conseguido el índice cromático? Razona la respuesta.



La coloración de aristas de la figura utiliza 5 colores, que es el mínimo posible, ya que una cota inferior para el índice cromático $\chi_1(G)$ es el grado máximo $\Delta(G)$ ($\chi_1(G) \geq \Delta(G)$) y en este caso es $\Delta(G) = 5$. Por tanto $\chi_1(G) = 5$.